Équations et Inéquations 2

Équation produit, équation quotient

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x+4)(x-7)=0$
2. $(2x+3)(4x-5)=0$
3. $-x(5-4x)=0$
4. $(-15x+3)(3x+9)=0$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x-2)^2-(x+6)^2=6$
2. $(2x+1)(x+4)+(x+4)(3-5x)=0$
3. $5x+8=9x-7$
4. $(x-7)(3x-5)-(9x-4)(x-7)=0$
5. $(4x-7)(9x+5)=(8x-3)(4x-7)$

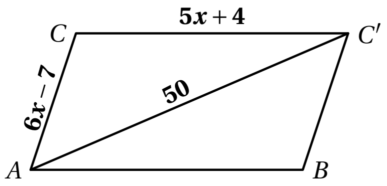
Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\dfrac{-2x+1}{-5x+1}=0$
2. $\dfrac{5x+3}{4x-3}=0$
3. $2+\dfrac{3x-1}{4x-7}=0$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

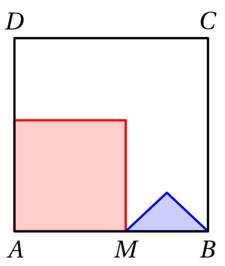
1. $\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{27}x}=0$
2. $\dfrac{-2x+1}{-9x^2+1}=0$
3. $\dfrac{69x+3}{6x^2+24}=0$

Exercices d'approfondissement



Exercice 5 Pour quelle(s) valeur(s) de x ce parallélogramme est-il un rectangle ?

Exercice 6



Le carré $ABCD$, ci-contre a un côté de longueur 8cm. M est un point pris au hasard sur le segment $[AB]$. On construit, à l'intérieur du carré $ABCD$, le carré de côté $[AM]$ et le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $[MB]$.
On s'intéresse aux aires du petit carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.
On pose $x = AM$.

1. Donner l'aire $\mathscr{A}_c$ du carré en fonction de x.
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}_t$ du triangle en fonction de x est $\left(4-\dfrac{x}{2}\right)^2$.
3. Donner l'aire $\mathscr{A}_m$ du motif en fonction de x.
4. Est-il possible de faire en sorte que
   - a. l'aire du motif soit de $40cm^2$?
   - b. L'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
   - c. L'aire du motif soit la plus petite possible ?
5. Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de chacun de ces trois problèmes.

Signe d'un produit

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x-4)(x+2)$.

1. Déterminer le signe de $3x-4$ et de $x+2$.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
3. Représenter graphiquement la fonction.

Exercice 8 Établir les tableaux de signes des fonctions.

1. $h(x) = (-2x+3)(-3x-5)$
2. $u(x) = (2x+14)(6x+24)$
3. $v(x) = (5x-65)(7-2x)$
4. $w(x) = (-3x-72)(-4x-96)$

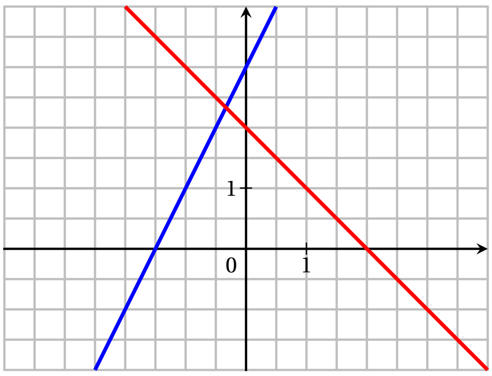
Exercice 9 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(9x-1)(4-x) < 0$
2. $(3x+2)(4x-8) \geqslant 0$
3. $(x^2+1)(3-x) \leqslant 0$
4. $(3x+1)(5x-7)(6-x) > 0$

Exercice 10 Dresser les tableaux de signes des fonctions.

1. $f(x) = (8x-1)^2(2-7x)$
2. $g(x) = (x-4)(9x+2)(5-x)$
3. $h(x) = -3(5x-1)(x+1)(4-6x)$

Exercice 11 Le graphique ci-dessous donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = -x+2$



On définit la fonction h par $h(x) = (2x+3)(-x+2)$.

1. Attribuer chaque courbe à la bonne fonction.
2. Déterminer graphiquement les valeurs qui annulent la fonction h.
3. Résoudre graphiquement $h(x) \geqslant 0$.
4. En déduire le tableau de signes de h.
5. Proposer une courbe représentative possible de la fonction h.

Signe d'un quotient

Exercice 12 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$
2. $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$
4. $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$
5. $m(x) = \dfrac{x-1)(2x+1)}{1-9x}$
6. $p(x) = \dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$
2. $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$
3. $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$
4. $\dfrac{3x-4}{x+2} \leqslant 0$

Exercice 14 L'objectif est de résoudre $\dfrac{x-7}{x+9} \geqslant 2$.

1. Quelle est la valeur que x ne peut pas prendre ?
2. Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

Exercice 15 En exprimant différemment le membre de gauche, résoudre les inéquations suivantes :

1. $2 - \dfrac{x-4}{3x+5} \geqslant 0$
2. $\dfrac{5x+1}{x-1} + 1 < 0$
3. $\dfrac{2x^2-9}{x-1} - 2x \geqslant 0$
4. $\dfrac{7}{x-2} - \dfrac{4x-5}{(x-2)^2} < 0$
5. $\dfrac{8x^2-9}{x+1} - 8x \geqslant 0$
6. $\dfrac{2x+1}{(x+3)^2} - \dfrac{2}{x+3} > 0$

Exercice 16 Le prix x d'un article est compris entre 20€et 50€. L'*offre* est le nombre d'articles qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de x €.

La *demande* est le nombre probable d'articles achetés par les consommateurs quand l'article est proposé à ce même prix de x €.

La *demande* se calcule avec $d(x) = -750x + 45\,000$ pour x en milliers d'articles.

L'*offre* se calcule avec $f(x) = -\dfrac{500\,000}{x} + 35\,000$.

Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

1. Écrire une inéquation traduisant le problème posé.
2. Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ s'écrit aussi $-500\,000 > -750x^2 + 10\,000x$.
3. Démontrer alors qu'elle peut aussi s'écrire $3x^2 - 40x - 2\,000 > 0$.
4. a. Démontrer que pour tout x : $3x^2 - 40x - 2000 = (x+20)(3x-100)$.
   b. En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.
   c. Conclure.

Inéquation produit, inéquation quotient

Exercice 17 Étudiez le signe de $g : \begin{cases} [-6;4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)(-x+2) \end{cases}$

Exercice 18 Résolvez l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19 Justifiez que les inéquations $(2x-4)(x+5)+x > -5$ et $(2x-3)(x+5) > 0$ sont équivalentes puis résolvez l'inéquation $(2x-4)(x+5)+x > -5$.

Exercice 20 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 16$.

Exercice 21 Résolvez les inéquations suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2 - 4x \leqslant -2x - 1$
2. $3x(x+3) - (x+3)^2 \leqslant 0$
3. $x^3 + 2x^2 + x \geqslant 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3) + 3x - 9 < 6x - 18$
6. $x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geqslant 0$
7. $(1-2x)x - 4x(x+6) \leqslant 0$
8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$
9. $(x^2-1) + 2x - 2 > 6x - 6$
10. $x^2 \leqslant 10$
11. $x^2 \leqslant -16$
12. $x^2 \leqslant 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leqslant 144$
15. $x^2 \leqslant 20$
16. $x^2 - 4 + (x+2)(2x+5) < 0$

Exercice 22 Résolvez les inéquations suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $(x+1)(x-3) \geqslant x^2 - 9$
2. $4x - 4 + (x-1)(x-4) + x^2 - 1 > 0$
3. $(x+5)^2 \leqslant (x+5)(x+3)$
4. $(2x-1)(x+3) \geqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$

Exercice 23 Résolvez l'inéquation $\frac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Exercice 24 Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geqslant 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leqslant \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geqslant 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leqslant 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geqslant 0$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leqslant 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geqslant 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leqslant 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geqslant 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

Exercice 25 Résolvez les inéquations suivantes.

1. $2x > 7x - 1$
2. $-4x - 10 \geqslant 2 - 4x$
3. $2x^2 < 2(x-7)^2$
4. $x^2 < 25$
5. $(x+3)^2 < -1$
6. $(x-6)^2 > 16$
7. $(2x - \sqrt{3})(2x+6) > 0$
8. $\frac{36-12x}{x-3} \leqslant 0$
9. $x^2 - 5 < (x+\sqrt{5})(x-2)$
10. $x^2 - 25 + (x-5)(6-x) \leqslant 0$

Exercice 26 Étudiez les positions relatives (au-dessus ou au-dessous) des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.

Exercice 27 Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.

Tous les articles fabriqués sont vendus. la recette totale en euros est donnée par $R(q) = 120q$.

1. Vérifiez que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
   Puis que la forme factorisée de $B(q)$ est : $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
2. Pour quels nombres d'articles produits la production est-elle rentable ?

Exercice 28 Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production, exprimé en milliers d'euros, de x tonnes de ce produit.

Pour $0 \leq x \leq 11$, des études ont montré que : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.

L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne. On note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

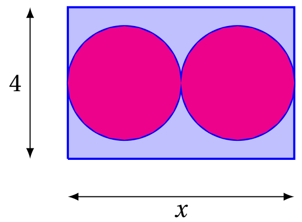
1. Exprimez $g(x)$ en fonction de x.
2. Développez, réduisez et ordonnez $B(x)$.
3. Développez, réduisez et ordonnez $(x-2)(x-10)$.
4. Résolvez l'inéquation $B(x) > 0$.
5. Interprétez le résultat de la question précédente.

Exercice 29 Soient f et g des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+1$

1. Vérifiez que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.
2. Résolvez l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 30

Soit un réel x dans $[0;8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre. On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

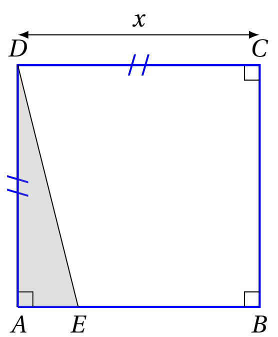


1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leqslant 2x$ sur $[0;8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0;\dfrac{16}{\pi}\right[$.

Exercice 31

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

$$EB = 6 \text{ cm}$$



1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?